Sur les partitions de Baire du plan évitant la distance unité

par Sylvain POIRIER

[Ce texte inachevé date de 1996 et depuis a végété dans mon ordi... comme je risque de n'être jamais motivé pour le terminer, je vous le livre tel quel.]

Un fameux problème s'énonce :

Pour quelles valeurs de n est-il possible de colorier le plan euclidien avec n couleurs de sorte que deux points à distance 1 l'un de l'autre ne soient jamais de la même couleur ?

ou plus formellement : quel est le nombre minimum de parties recouvrant le plan dont aucune ne contienne une paire de points distants de 1 ?

Il n'importe pas de supposer ces parties disjointes : pour les rendre disjointes il suffit d'ordonner totalement l'ensemble des couleurs et de donner à chaque point sa couleur de plus grand numéro.

Il est connu que 7 couleurs suffisent, tandis que 3 ne suffisent pas. Des variantes de ce problème ont été étudiées. Ainsi, si on impose aux parties d'être mesurables, 4 couleurs ne suffisent pas.

Woodall [si vous voulez la référence j'essaierai de la retrouver] a montré qu'avec des régions en nombre localement fini dont les frontières sont formées d'arcs de Jordan, 5 couleurs ne suffisent pas. Cependant, sa démonstration n'était pas très claire. Dans l'étape 3, la dernière phrase du premier paragraphe est fausse ; heureusement, elle ne sert pas dans la suite de sa démonstration.

L'étape 4 est incorrecte : on peut seulement démontrer pour un "arc unité d'épaisseur positive" contenu dans au plus 2 des ensembles que

1) S'il est de longueur $> \frac{\pi}{3}$, il est traversé par au moins une arête.

2) Toute arête qui le traverse est contenue dans l'intersection des disques de rayon 1 de centres les deux extrémités de l'arc.

D'où l'on déduit que :

3) Sa longueur est inférieure ou égale à $\frac{2\pi}{3}$

4) Dans le cas d'un arc extérieur cette inégalité devient stricte.

Les étapes 5 et 6 s'appuyaient sur une inégalité stricte en général ; la manière dont on pourrait démontrer l'étape 6 a été mentionnée dans l'article (...) mais aucune correction n'a été faite pour démontrer l'étape 5 ; or on peut le faire en considérant l'arc extérieur du côté de l'angle au lieu de l'arc intérieur opposé, grâce au point 4) ci-dessus.

L'étape 7 se fait alors ; elle utilise les étapes 5 et 6 et les points 1) et 2) ci-dessus.

Le but de cet article est de démontrer l'insuffisance de 5 couleurs sous une hypothèse plus faible :

Théorème. *Si le plan euclidien $\mathcal{P}$ est Baire-presque recouvert par n parties ayant la propriété de Baire et dont aucune ne contient deux points distants de 1, alors $n > 5$.*

L'intérêt de cet énoncé vient du fait qu'il a été démontré que si on enlève l'axiome du choix en gardant l'axiome du choix dépendant, on peut supposer que toutes les parties du plan ont la propriété de Baire. Par conséquent, le présent énoncé indique qu'on ne peut pas construire sans l'axiome du choix un exemple de partition du plan en 5 parties sans qu'il y ait 2 points à distance 1 dans une même partie.

La démonstration de ce théorème nécessitera de nombreuses étapes. A chaque fois, les raisonnement seront locaux, en sorte qu'on pourrait en déduire un réel r tel que le théorème resterait vrai en remplaçant le plan par un disque de rayon r.

[Elle est inachevée en deux endroits. Le premier endroit est la preuve du lemme 3.11 qui est de toute manière mal démarrée (il faudrait changer le choix entre ouvert et fermé pour simplifier). Je n'ai pas trouvé une manière de combler ce trou, bien que le lemme lui-même eut l'air vrai, et je ne suis donc pas totalement certain que ce soit possible. Par contre, pour finir la démonstration après ce qui est écrit, j'ai eu clairement l'idée d'une méthode possible, en quelques pages de plus.]

Pour abréger, une partie du plan ne contenant pas deux points distants de 1 sera dite "sans paire unité". Dans la suite on abrègera l'expression "cercle de rayon 1" par "1-cercle" et "disque de rayon 1" par "1-disque". On notera A^c le complémentaire de A, $\overline{A}$ son adhérence et A° son intérieur.

On commencera par remplacer chacune de ces n parties par un ouvert E_i dont elle diffère par une partie maigre. On vérifie immédiatement que les adhérences de ces n ouverts recouvrent le plan. Il reste à vérifier :

Proposition 0. *Si A est une partie de $\mathcal{P}$ sans paire unité, et B est un ouvert tels que $A\Delta B$ est maigre, alors B est également sans paire unité.*

Démonstration. Notons Δ la différence symétrique.

Soit H la sous-variété de $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ formée des couples (M,N) tels que $\mathrm{dist}(M,N)=1$, et soient p, p' les projections de H sur $\mathcal{P}$. Chacune des projections p, p' fait de H un fibré trivial $\mathcal{P}\times S^1$. Ce sont des applications continues ouvertes, et H est un espace de Baire. L'image réciproque par p ou p' d'un fermé d'intérieur vide en est un, donc de même pour une partie maigre.

L'absence de paire unité dans A se traduit par : $p^{-1}(A)\cap p'^{-1}(A)=\emptyset$. On a :

$$\begin{aligned} p^{-1}(B)\cap p'^{-1}(B) &= (p^{-1}(B)\cap p'^{-1}(B))\Delta(p^{-1}(A)\cap p'^{-1}(A)) \\ &\subseteq (p^{-1}(B)\Delta p^{-1}(A))\cup(p'^{-1}(B)\Delta p'^{-1}(A)) = p^{-1}(B\Delta A)\cup p'^{-1}(B\Delta A). \end{aligned}$$

L'ouvert $p^{-1}(B)\cap p'^{-1}(B)$ étant inclus dans une partie maigre est vide, ce qui démontre la proposition 0.

Cette proposition permet de remplacer la donnée initiale des n parties par une donnée meilleure, à savoir :

Soit I l'ensemble des "couleurs", à n éléments.

Définition. *On appellera "carte" la donnée de n ouverts disjoints E_i $(i\in I)$, sans paire unité, dont les adhérences F_i recouvrent $\mathcal{P}$, tels que $\forall\, i,\ E_i = F_i^\circ$ (autrement dit l'ouvert E_i est régulier).*

En effet, les parties initiales ont pu être supposées disjointes, et les E_i peuvent être supposés égaux à l'intérieur de leur adhérence puisque la différence entre un ouvert et l'intérieur de son adhérence est maigre (inclus dans sa frontière).

Il nous faudra encore ameliorer cette donnée par la suite, pour étudier le cas n=5. Mais nous n'en avons pas besoin pour éliminer le cas n=4, après quelques premières propositions.

On emploiera les abbréviations suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall\, M\in\mathcal{P},\ J_M=\{i\in I|M\in F_i\} \\ &\forall\, i,j\in I,\ F_{ij}=F_i\cap F_j \\ &\forall\, J\subseteq I,\ F_J=\bigcap_{i\in J}F_i=\{M\in\mathcal{P}|J\subseteq J_M\} \\ &\forall\, k=1 \text{ à } n+1,\ F^k=\bigcup_{J\subseteq I,\#J=k}F_J=\{M\in\mathcal{P}|\#J_M\geq k\} \end{aligned}$$

Ces ensembles sont évidemment des fermés, I étant fini. De plus les E_i forment avec F^2 une partition du plan.

On appellera état toute composante de $(F^2)^c$: un état est toujours d'une seule couleur (inclus dans un E_i).

Proposition 1. *Si $A \subseteq F_i$ est fermé, connexe et non inclus dans un singleton alors*

1) $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{E}(A)$ partitionnent le plan
2) $E_i \subseteq \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{E}(A)$
3) $\overline{\mathcal{D}(A)} \cap \overline{\mathcal{E}(A)}$ est soit vide, soit réduit à un singleton $\{Q\}$ auquel cas $A \subseteq \mathcal{C}_Q$
4) Tout connexe $B \subseteq F_i$ est inclus dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ ou dans $\overline{\mathcal{E}(A)}$
5) Le diamètre de A est inférieur ou égal à 1.

Démonstration.

1) Pour tout point M du plan, l'image du connexe A par l'application $\text{dist}(M, \bullet)$ est soit contenue dans $[0, 1[$ $(M \in \mathcal{D}(A))$, soit dans $]1, +\infty[$ $(M \in \mathcal{E}(A))$, soit elle contient 1 $(M \in \mathcal{C}(A))$.

2) L'absence de paire unité dans E_i se traduit par $\mathcal{C}(E_i) \cap E_i = \emptyset$. Comme $\mathcal{C}(E_i)$ est ouvert on a $\mathcal{C}(E_i) \cap F_i = \emptyset$. Or $A \subseteq F_i$ donc $A \cap \mathcal{C}(E_i) = \emptyset$, autrement dit $\mathcal{C}(A) \cap E_i = \emptyset$ et le 1) permet de conclure.

3) Supposons $Q \in \overline{\mathcal{D}(A)} \cap \overline{\mathcal{E}(A)}$. On a :

$$Q \in \overline{\mathcal{D}(A)} \subseteq \overline{\bigcap_{M \in A} \mathcal{D}_M} = \bigcap_{M \in A} \overline{\mathcal{D}_M}$$

donc $A \subseteq \overline{\mathcal{D}_Q}$. De même $A \subseteq \overline{\mathcal{E}_Q}$ donc $A \subseteq \mathcal{C}_Q$. Comme A est connexe non réduit à un singleton, Q est unique.

4) Si $\overline{\mathcal{D}(A)} \cap \overline{\mathcal{E}(A)} = \emptyset$ c'est évident. Sinon $A \subseteq \mathcal{C}_Q$. Remplaçons B par sa composante connexe, qui est fermée et par l'absurde supposons que B rencontre $\overline{\mathcal{D}(A)} - \{Q\}$ et $\overline{\mathcal{E}(A)} - \{Q\}$. Il les rencontre également au voisinage de Q. Donc pour un point $M \in A$ qui n'est pas une extrémité de A, B réalise des distances à M des deux côtés de 1, ce qui entraîne M n'est adhérent ni à $\mathcal{D}(B)$ ni à $\mathcal{E}(B)$. C'est absurde d'après 2).

5) résulte de 4) avec $A = B$: on a $A \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)}$, mais il peut aussi se déduire directement de 3)...

Proposition 2. *F^{n-2} est totalement discontinu.*

On utilisera les lemmes suivants de topologie générale :

Lemme 2.1. *Toute composante connexe d'un espace compact est égale à l'intersection des ouverts-fermés qui la contiennent.*

Démonstration.

Soient X un espace compact, $a \in X$, (A_i) la famille des ouverts-fermés de X qui contiennent a, et F leur intersection, qui est fermée. La composante de a dans X est nécessairement incluse dans F. Il reste à montrer que F est connexe. Par l'absurde supposons F partionnée en deux fermés F_1 et F_2, avec $a \in F_1$.

Comme X est compact, il existe une séparation de F_1 et F_2 par deux ouverts O_1 et O_2 avec $F_j \subseteq O_j$ ($j = 1, 2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

X est recouvert par les ouverts O_j et A_i^c. Il en existe un sous-recouvrement fini par les O_j et A_i^c ($i \subseteq J$ fini).

Soit

$$A = O_1 \cap \bigcap_{i \subseteq J} A_i = O_2^c \cap \bigcap_{i \subseteq J} A_i.$$

C'est un ouvert-fermé de X contenant a donc c'est un A_k. $F_2 \subseteq F \subseteq A_k$ et $A_k \cap F_2 = \emptyset$ donc $F_2 = \emptyset$.

Lemme 2.2. *Dans un espace séparé, si K est compact, F est fermé non vide et $K \cup F$ est connexe alors toute composante connexe de K rencontre F.*

Démonstration.

Soit C une composante connexe de K. D'après le lemme précédent, C est l'intersection des ouverts-fermés de K qui le contiennent. Supposons par l'absurde que $C \cap F = \emptyset$. Comme K est compact, il existe une sous-famille finie non vide dont l'intersection B ne rencontre pas F.

B est un ouvert-fermé de K, autrement dit B et $K - B$ sont fermés. On a donc une partition de $K \cup F$ en deux fermés B et $(F \cup K) - B = F \cup (K - B)$, ce qui contredit la connexité de $K \cup F$. (B est non vide car $C \subseteq B$, et F est non vide par hypothèse).

Démonstration de la proposition 2.

Soit k le plus grand entier tel qu'il existe une une composante connexe C de F^k de diamètre non nul, et supposons par l'absurde $k \geq n-2$. Il existe alors un point M de C tel que $\#J_M = k$ (sinon $C \subseteq F^{k+1}$, absurde). Posons $J = J_M$. Soit A la composante connexe de M dans F_J. Montrons par l'absurde que $A \neq \{M\}$.

C est recouvert par le compact $K = C \cap F_J \cap \overline{\mathcal{D}}_M$ et le fermé

$$F = C \cap (\overline{\mathcal{E}}_M \cup \bigcup_{i \notin J} F_i).$$

D'après le lemme 2.2., la composante connexe A de M dans K rencontre F. Or $M \notin F$, d'où l'absurdité.

Appliquons la proposition 1 à A. Soit $U = \mathcal{C}(A)^\circ$. U est un ouvert connexe de diamètre au moins 2, comportant au plus deux couleurs i et j (qui n'appartenant pas à J).

Soit B un état rencontrant U, et soit G sa frontière extérieure (l'intersection de son adhérence et de la composante non bornée X de son complémentaire). G est compact, connexe et inclus dans F^2. G rencontre U (car en partant de B et en parcourant U par un chemin de diamètre ≥ 2 on finit bien par rencontrer X en un certain point). Donc F^2 rencontre U, ce qui prouve que $k = n-2$; on a $F^2 \cap U \subseteq F_{ij}$.

Si $G \nsubseteq F_{ij}$, G est recouvert par le compact $K = G \cap F_{ij}$ et le fermé $G - U$. Donc une composante de K rencontrant U, rencontre aussi $G - U$.

Dans les deux cas il existe un connexe $A' \subseteq F_{ij}$, rencontrant U et de diamètre non nul. On constate aisément sur un dessin que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(A')$ est d'intérieur non vide, alors qu'il ne peut rencontrer aucun E_k pour $k \in I$, d'après la proposition 1. C'est absurde.

La proposition 2 est maintenant démontrée.

Corollaire. $n > 4$.

En effet F^2 n'est pas totalement discontinu (la frontière extérieure de n'importe quel état est connexe de diamètre non nul).

Pour aller plus loin, nous allons remplacer la carte par une carte meilleure, à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3. *S'il existe une carte à n couleurs, alors il en existe une telle que tout F_i vérifie la condition suivante :*

(*) *Pour toute partie A connexe de F_i égale à l'adhérence d'un ouvert, et pour tout 1-disque fermé D, toute composante bornée du complémentaire de $A \cup D$ est incluse dans E_i.*

Pour démontrer cette proposition nous allons d'abord introduire quelques outils.

Pour tout point M du plan on note $\mathcal{C}_M$ le 1-cercle de centre M, $\mathcal{D}_M$ le disque ouvert correspondant et $\mathcal{E}_M$ le complémentaire de $\overline{\mathcal{D}_M}$.

Pour toute partie A du plan on pose

$$\mathcal{D}(A) = \bigcap_{N\in A} \mathcal{D}_N \quad , \quad \mathcal{C}(A) = \bigcup_{N\in A} \mathcal{C}_N \quad , \quad \mathcal{E}(A) = \bigcap_{N\in A} \mathcal{E}_N.$$

Définition. *On appellera fonction de remplissage et on notera Φ l'application de l'ensemble des parties du plan dans lui-même défini par : $\forall\, A \subseteq \mathcal{P}, \Phi(A) = \{M \in \mathcal{P},$ tout 1-cercle passant par M rencontre $A\}$*

Lemme 3.1. *On a les propriétés évidentes suivantes :*

$$\forall\, A, \quad \Phi(A) = \{M \in \mathcal{P}, \mathcal{C}_M \subseteq \mathcal{C}(A)\} = \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)^c)^c$$

$$\Phi \circ \Phi = \Phi$$

$$\forall\, A, \quad A \subseteq \Phi(A)$$

$$\forall\, A, B, \quad A \subseteq B \Rightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$$

Lemme 3.2. *Les applications $\mathcal{C}$ et Φ respectent les ouverts et les fermés.*

Démonstration. Supposons A fermé et $M \notin \mathcal{C}(A)$, autrement dit A est disjoint de $\mathcal{C}_M$. Comme $\mathcal{C}_M$ est compact et A fermé, la distance de $\mathcal{C}_M$ à A est non nulle, notons-la ε. Soit B la boule ouverte de centre M et de rayon ε. Par inégalité triangulaire, B est disjoint de $\mathcal{C}(A)$. Donc $\mathcal{C}(A)$ est fermé.

Supposons maintenant A ouvert. Il est plus facile de vérifier que $\mathcal{C}(A)$ est ouvert, mais on peut aussi le faire en remarquant que $\mathcal{C}(A) = p'(p^{-1}(A))$ (notations de la proposition 1), or p' est une application ouverte. Le reste résulte de $r(A) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)^c)^c$.

Lemme 3.3. *Pour tout fermé connexe A de diamètre inférieur ou égal à 1, et pour tout 1-disque fermé D, toute composante bornée du complémentaire de $A \cup D$ est incluse dans $\Phi(A)$.*

Démonstration.

Par l'absurde imaginons qu'il existe un 1-cercle $\mathcal{C}$ ne rencontrant pas A mais une composante bornée B de $(A \cup D)^c$. Comme $\mathcal{C}$ a même rayon que D, $D - \mathcal{C}$ est un arc de cercle, de diamètre 2. Comme il rencontre B et pas A, il est inclus dans B. Donc le diamètre de B est au moins égal à 2 ; celui de A étant inférieur ou égal à 1, l'absurdité est évidente.

On pourrait démontrer la réciproque : A étant fermé connexe de diamètre ≤ 1, tout point intérieur à $\Phi(A)$ et non dans A est dans une composante bornée de $(A \cup D)^c$ pour un certain D, mais cela ne sera pas utile.

Lemme 3.4. *Pour tout i, l'intérieur de $\Phi(F_i)$ est sans paire unité.*

Démonstration. On va même voir qu'il ne peut exister deux points $M \in \Phi(F_i)$ et N intérieur à $\Phi(F_i)$ distants de 1 l'un de l'autre : sinon, $\mathcal{C}_N$ recoupe F_i en un point M', au voisinage duquel il existe un point $M'' \in E_i$ tel que $\mathcal{C}_{M''}$ recoupe $\Phi(F_i)$ (au voisinage de N) et donc aussi F_i. Mais c'est impossible car $\mathcal{C}_{M''} \subseteq \mathcal{C}(E_i)$ qui, étant ouvert et ne rencontrant pas E_i, ne peut rencontrer F_i. □

Soit E'_i l'intérieur de $\Phi(F_i)$, et $F'_i = \overline{E'_i} \subseteq \Phi(F_i)$ puisque $\Phi(F_i)$ est fermé.

Il résulte de ce qui précède que pour tout fermé connexe $A \subseteq F'_i$ on a $\Phi(A) \subseteq \Phi(F'_i) \subseteq \Phi(\Phi(F_i)) = \Phi(F_i)$ donc pour tout 1-disque fermé D, toute composante bornée du complémentaire de $A \cup D$ est incluse dans $\Phi(F_i)$ donc dans E'_i puisqu'elle est ouverte : l'ensemble F'_i vérifie la propriété (*).

Malheureusement, ceci ne démontre pas encore la proposition 1 à cause du fait qu'on veut avoir des E_i disjoints. Il faut poursuivre la construction ; on ne pourra pas alors éviter de supposer A égal à l'adhérence de son intérieur.

Mais, de la propriété (*) pour F'_i on peut déjà déduire le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Pour toute composante connexe A de E'_i, et pour tout 1-disque (ouvert ou fermé) D rencontrant A, $D \cap A$ est connexe.*

Démonstration.

Soit Q le centre de D. Supposons par l'absurde que $D \cap A$ n'est pas connexe. Comme A est connexe et ouvert, il existe deux points M et N de A à la frontière $\mathcal{C}$ de D, appartenant à deux composantes différentes de $D \cap A$ (ou leurs adhérences si D est ouvert), et tels qu'il existe un chemin contenu dans $A - \mathcal{D}_Q$ qui les relie. Et il existe $\epsilon > 0$ tel que les disques V et V' de centres M et N et de rayon ϵ soient contenus dans A.

Il existe ensuite Q' à distance inférieure à ϵ de Q et à distance supérieure à 1 de M et N. Soit H l'ouvert réunion de V, V' et de la bande de $\mathcal{D}_Q \cap \mathcal{E}_{Q'}$ comprise entre eux, qui les relie. (on rappelle que A est de diamètre inférieur ou égal à 1).

On voit facilement sur un dessin que toute composante du complémentaire de $\overline{A \cup \mathcal{D}_{Q'}}$ qui rencontre H est bornée, donc incluse dans E'_i. Ainsi $H \subseteq \overline{E}'_i$; or H est ouvert et E'_i régulier donc $H \subseteq E'_i$. Comme A est une composante connexe de E'_i on en déduit $H \subseteq A$ ce qui contredit l'hypothèse que les composantes de M et N dans $D \cap A$ sont différentes.

La construction sera la suivante, appliquée successivement à chacun des E_i : pour chaque composante connexe (ouverte) A de E'_i, soit $C = A \cap E_i$ et B l'ensemble des points M de A tels que pour tout 1-disque fermé D ne contenant pas M, la composante connexe de M dans $A - D$ rencontre C. On a évidemment $C \subseteq B \subseteq A$, et si C est vide alors B l'est également ; on remarque aussi que $A - B$ est ouvert. On remplacera alors E_i par la reunion E''_i des intérieurs de B lorsque A décrit l'ensemble des composantes connexes de E'_i. On trouve que $E_i \subseteq E''_i \subseteq E'_i$. Les autres E_j et F_j, pour $j \neq i$, sont diminués en conséquence. Il reste à vérifier que $F''_i = \overline{E''_i}$ possède la propriété voulue, et que si F_j la possède alors $F_j - E''_i$ la possède également.

Lemme 3.6. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $M \in A - B$ il existe un 1-disque fermé disjoint de $\overline{B}$ et dont la frontière contient M.*

Démonstration.

Par définition de B, il existe un 1-disque fermé D tel que la composante H de M dans $A - D$ ne rencontre pas C. On remarque que H est ouvert. Soit à présent Q tel que $\overline{\mathcal{D}}_Q$ rencontre H mais ne rencontre pas D. D'après le lemme 3.5, $\overline{\mathcal{D}}_Q \cap A$ est connexe ; or il est contenu dans $A - D$ donc il est contenu dans H. Mais H est disjoint de B par définition de B, donc $\overline{\mathcal{D}}_Q \cap A$ est disjoint de B. Comme $B \subseteq A$, on a finalement que $\overline{\mathcal{D}}_Q$ est disjoint de B. Or l'ensemble des Q qui vérifient cette condition est un ouvert, d'où $\overline{\mathcal{D}}_Q$ est disjoint de $\overline{B}$. Le choix d'un Q à distance 1 de M donne la conclusion.

Lemme 3.7. *Soit L une partie du plan, U l'intérieur de $\mathcal{E}(L)$ et deux points M, M' de U dont la distance entre eux est inférieure à 1 et leurs composantes connexes dans U sont de diamètre inférieur ou égal à 1. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

i) La borne inférieure des distances de deux points Q et Q' de L tels que les segments $[QQ']$ et $[MM']$ se coupent est inférieure ou égale à 2.

ii) Il existe deux points Q, Q' adhérents à L tels que $\mathrm{dist}(Q,Q') \leq 2$ et que les segments $[QQ']$ et $[MM']$ se coupent.

iii) les composantes connexes de M et M' dans U sont distinctes.

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$ tel que les disques de centres M et M' et de rayon ϵ soient contenus dans U. les points M et M' sont donc à une distance supérieure à $1+\epsilon$ de L.

On remarque que pour deux points Q et Q' adhérents à L et de distance entre eux inférieure à $2+\epsilon$, d'abord ils sont "loin" du segment $[MM']$ puisque $\mathrm{dist}(M,M') < 1$, ensuite les points M et M' sont à des distances du segment $[QQ']$ minorée en fonction de ϵ, inégalité triangulaire oblige. Ainsi la condition "les segments $[MM']$ et $[QQ']$ se coupent" est soit largement vérifiée, soit largement non-vérifiée.

On en déduit alors que ii) $\Longrightarrow$ i) facilement (en bougeant légèrement Q et Q'), et que i) $\Longrightarrow$ ii) par compacité. Il reste à vérifier l'équivalence de ii) avec iii).

Supposons ii). Les disques fermés $\overline{\mathcal{D}}_Q$ et $\overline{\mathcal{D}}_{Q'}$, qui se touchent et sont disjoints de U, séparent les points M et M' : ceux-ci sont de part et d'autre de la médiane $[QQ']$ dans le rectangle dont les côtés de milieux Q et Q' sont de longueur 2. Donc si M et M' étaient dans la même composante connexe de U, celle-ci devrait faire le tour de $\mathcal{D}_Q$ ou de $\mathcal{D}_{Q'}$ et serait donc de diamètre supérieur à 1. On en déduit iii).

A présent supposons iii). Soient O et O' les points d'intersection de $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{C}'_M$, et $H = \overline{\mathcal{D}}_O \cap \overline{\mathcal{D}}_{O'}$. L'ensemble des points $Q \in \overline{L}$ tels que $\mathcal{D}_Q$ rencontre H est séparé en deux parties compactes L_1 et L_2 par la droite (MM'), avec L_1 du côté de O.

Soit N un point adhérent à la composante connexe U_1 de M dans $U \cap H^\circ$ et dont la distance à M' soit minimale (un tel point existe par compacité). Montrons que $\overline{\mathcal{D}}_N$ rencontre L_1 et L_2. Nécessairement il en rencontre un des deux car sinon il y aurait un voisinage de N dans H qui serait inclus dans U. Supposons par l'absurde qu'il rencontre L_1 et pas L_2. Il n'est alors pas possible que N soit sur $\mathcal{C}_O$ car pour tout $Q \in L_1$, $\mathcal{D}_Q$ étant distant d'au moins ϵ des points M et M' est également distant d'au moins ϵ de l'arc $(MM') \subseteq \mathcal{C}_O$.

Au voisinage de N, l'ouvert U coïncide donc avec $\mathcal{E}(L_1)$. On vérifie alors facilement sur un dessin que cela contredit la minimalité de la distance de N à M'.

Donc $\overline{\mathcal{D}}_N$ rencontre L_1 et L_2, respectivement en Q et Q'. Ces deux points conviennent pour ii).

Lemme 3.8. *Soient deux composantes connexes distinctes U, U' de E'_i qui font partie de la même composante connexe K de F'_i. Il existe alors deux 1-disques $D = \mathcal{D}_Q$ et $D' = \mathcal{D}_{Q'}$ tangents en un point O et disjoints de K tels que $K \subseteq \mathcal{D}_O$ et que U et U' soient de part et d'autre de la droite (QQ').*

Démonstration.

Soit $L = \mathcal{E}(K)$. On a évidemment $K \subseteq \mathcal{E}(L)$. D'autre part on vérifie que l'intérieur de $\mathcal{E}(L)$ est inclus dans E'_i. En effet, comme E'_i est l'intérieur de $\Phi(F_i)$, il existerait sinon un $M \in \mathcal{E}(L) - \Phi(F_i)$; puis un 1-cercle $\mathcal{C}$ passant par M et disjoint de $\Phi(F_i)$, donc de K. Comme K est connexe, il est donc soit à l'intérieur de $\mathcal{C}$, soit à l'extérieur. Dans le premier cas, il suffit de remplacer $\mathcal{C}$ par son symétrique par rapport à M pour se ramener au second cas. Son centre est alors dans L, ce qui contredit $M \in \mathcal{E}(L)$.

Ainsi, U et U' sont deux composantes connexes de l'intérieur de $\mathcal{E}(L)$; d'après la proposition 1.5) appliqué à K, leurs diamètres sont ≤ 1 et si $M \in U$, $M' \in U'$ alors $\mathrm{dist}(M,M') < 1$. Le lemme 3.7 iii) $\Longrightarrow$ ii) donne alors facilement la conclusion.

On va maintenant commencer à vérifier la propriété (*) pour F_i'', en partant de ses hypothèses.

Lemme 3.9. *Soit G une partie connexe de F_i'' égale à l'adhérence d'un ouvert, D un 1-disquefermé et H une composante connexe bornée du complémentaire de $G \cup D$. Alors H est inclus dans une composante connexe de E_i' qui rencontre G.*

Démonstration.

Vérifions d'abord que $H \subseteq E_i'$. D'après le lemme 3.3, $H \subseteq \Phi(G)$. Or $G \subseteq F_i'' \subseteq F_i'$ donc $H \subseteq \Phi(F_i')$. H étant ouvert on a alors $H \subseteq E_i'$.

Supposons par l'absurde que la composante connexe de E_i' contenant H ne rencontre pas G. Soit alors $M \in H$ et $N \in G^\circ$ tel que $\mathrm{dist}(M,N) < \frac{11}{10}\,\mathrm{dist}(M,G)$. On peut alors appliquer le lemme 3.8. aux composantes de M et N. Le disque de centre M et de rayon $\mathrm{dist}(M,G)$ recoupe alors les deux disques donnés par ce lemme et renferme le connexe G dans une petite zone dont on voit mal comment elle pourait entourer M sur un demi-tour comme cela est exigé par les hypothèses (H doit être une composante bornée du complémentaire de $G \cup D$).

Lemme 3.10. *Dans les conditions du lemme 3.9, soit A la composante de E_i' qui contient H et B l'ensemble défini dans la construction de F_i''. On a alors $H \subseteq B$.*

Démonstration.

Par rapport au B donné dans la construction de F_i'' on a : la différence de B et B' est maigre, et $B' \subseteq B$ puisque $A - B$ est ouvert et B' est l'adhérence d'un ouvert.

D'après le lemme 3.9, A rencontre G, or $G \subseteq F_i''$ donc G rencontre $A \cap F_i'' \subseteq B$.

D'autre part, $H \subseteq \Phi(G)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un point M appartenant à $H \subseteq A$ mais non à B. D'après le lemme 3.6, il existe donc un 1-cercle $\mathcal{C}$ passant par M tel que $\overline{B}$ lui soit extérieur. Soit ϵ tel que la boule de centre M et de rayon ϵ soit incluse dans A.

Comme $H \subseteq \Phi(G)$, $\mathcal{C}$ rencontre G. Quitte à bouger légèrement $\mathcal{C}$, on peut supposer que pour chaque demi-cercle $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ partant de M, si $\mathcal{C}'$ rencontre G alors, N étant le point de $G \cap \mathcal{C}'$ le plus près de M, $\mathcal{C}'$ rencontre l'intérieur de G en un point N' tel que $\mathrm{dist}(N,N') < \epsilon$.

On peut alors appliquer le lemme 3.8 à A et la composante de N', qui sont distinctes puisque $\mathcal{C}$ ne rencontre pas $\overline{B}$. Il fournit alors deux 1-disque D et D' disjoints de G, avec l'un d'eux, mettons D, qui rencontre $\mathcal{C}'$ entre M et N' avec un diamètre d'intersection au moins ϵ, puisque la distance de M à D' vaut au moins ϵ. Donc G ne peut pas traverser $\mathcal{C}'$ entre M et D.

B est à l'extérieur de $\mathcal{C}$ et rencontre le connexe G ; celui-ci doit passer par le point de tangence de D et D' à l'intérieur de $\mathcal{C}$, il ne peut contourner D qui est trop gros, il doit donc traverser $\mathcal{C}$ par l'autre demi-cercle issu de M. Mais le même raisonnement s'y applique, et donne une absurdité.

On voit maintenant que F_i'' vérifie la propriété (*) : $H \subseteq B$ et H est ouvert donc H est dans l'intérieur de B, qui est dans E_i''.

Il reste à démontrer que si F_j a la propriété (*) alors $F_j - E_i''$ l'a aussi. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant concernant l'ensemble B générique de la construction de E_i'' .

Lemme 3.11. *Pour tout 1-disque fermé D, toute composante connexe de $B^\circ - D$ rencontre C (autrement dit rencontre E_i).*

Démonstration.

Soit O le centre de D. Définissons les ensembles suivants : $L = \mathcal{E}(A) \cup \{O\}$ et $L' =$ la réunion de L et de l'ensemble des centres des 1-disque fermés D' rencontrant A et tels qu'il existe un 1-disque fermé

D'' disjoint de D' tel que la composante connexe de $A \cap D'$ (cf lemme 3.5) dans $A - D''$ ne rencontre pas C.

Par le même raisonnement qu'au début du lemme 3.8, on montre que toute composante connexe de $A - D$ (resp. $B^\circ - D$) est une composante connexe de l'intérieur de $\mathcal{E}(L)$ (resp. $\mathcal{E}(L')$ grâce à la démonstration du lemme 3.6).

Soit H une composante connexe de $B^\circ - D$, et $M \in H$. Par définition de B, H est contenu dans une composante H' de $A - D$ qui rencontre C en un point M'. On en déduit d'après le lemme 3.7 que la borne inférieure b des distances QQ' pour des points Q, Q' de L tels que $[QQ']$ coupe $[MM']$, est strictement supérieure à 2. Il reste à montrer que cette borne inférieure est aussi strictement supérieure à 2 pour L', pour en déduire que $M' \in H$.

Soit $0 < \epsilon < b - 2$ tel que les boules de centres M et M' et de rayon ϵ sont contenues dans $B - D$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe Q et Q' dans L' tels que $[QQ']$ coupe $[MM']$ et $\mathrm{dist}(Q, Q') \leq 2 + \epsilon$. Un de ces points, disons Q, n'est pas dans L. Il existe donc un disque fermé $D'' = \overline{\mathcal{D}}_R$ disjoint de $D' = \overline{\mathcal{D}}_Q$ tel que D' rencontre une composante connexe K de $A - D''$ (K est ouvert) qui ne rencontre pas E_i. Quitte à rapprocher D'' de D' on peut supposer que leur distance l'un à l'autre ϵ' est inférieure à ϵ.

Soit alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre R et de rayon $2 + \epsilon'$. L'ensemble Z des points N de $\mathcal{C}$ tels que $\mathcal{D}_N$ rencontre K est un ouvert de l'espace topologique $\mathcal{C}$, et pour tout N à la frontière de Z on a $N \in L$: en effet pour tout $N \in Z$, on a $\mathcal{D}_N \cap A \subseteq K$ donc $\mathcal{D}_N \cap (A - K) = \emptyset$. $\mathcal{D}_N$ étant un disque ouvert on a encore à la limite, si N est à la frontière de Z, $\mathcal{D}_N \cap (A - K) = \emptyset$. Comme on a en plus $N \notin Z$, $\mathcal{D}_N \cap K = \emptyset$ donc $\mathcal{D}_N \cap A = \emptyset$. Comme A est ouvert on a finalement $N \in \mathcal{E}(A) \subseteq L$.

Remarquons que $Q \in Z \subseteq L'$. Montrons qu'il existe un sens de parcours de Q dans Z vers un point frontière N en sorte que la distance de Q à Q' reste inférieure à $2 + \epsilon$.

—Trou dans la démonstration—

Achevons la démonstration de la proposition 3 :

supposons que F_j a la propriété (*), et soit un fermé $A \subseteq F_j - E_i''$ égal à l'adhérence d'un ouvert. Alors pour tout 1-disquefermé D, toute composante bornée H de $(A \cup D)^c$ est incluse dans E_j, donc est disjointe de E_i. Il faut montrer qu'elle est aussi disjointe de E_i''. Si ce n'était pas le cas, H rencontrerait un certain ensemble B° de la construction précédente (puisque E_i'' est la réunion des B°), et par conséquent contiendrait une composante connexe de $B^\circ - D$ (car $A \cap B^\circ = \emptyset$). Ce qui contredit le dernier lemme.

Dans la suite, nous n'aurons en réalité pas besoin de toute la force de cette proposition, mais supposerons seulement de notre carte la chose suivante : $\star$Pour toute partie A connexe de F_i égale à l'adhérence d'un ouvert *auyant au plus deux composantes connexes*, et pour tout 1-disque fermé D, toute composante bornée du complémentaire de $A \cup D$ est incluse dans E_i.

Proposition 4. *Pour toutes couleurs $i \neq j$ et pour tout 1-disque ouvert D, toute composante connexe K de $F_{ij} - D$ rencontre F^3.*

Démonstration.

–Premier cas : supposons que K rencontre $\overline{D}$.

Soit H la réunion de D et de tous les états qui le rencontrent. On vérifie que H est simplement connexe.

En effet le lemme 3.5 nous dit que pour tout état A rencontrant D on a $A \cap D$ connexe, et donc $A \cup D$ est simplement connexe. Enfin, tous les états sont disjoints.

Par conséquent la frontière de H est connexe ; elle est incluse dans F^2, donc recouverte par F_{ij} et la réunion des F_k pour k différent de i et j. On peut alors appliquer alors le lemme 2.2 puisque F_{ij} ne peut recouvrir la frontière de H pour des raisons de diamètre d'après la proposition 1. On en déduit que K contient un connexe qui rencontre un F_k pour $k \neq i, j$. Or $K \cap F_k \subseteq F^3$, d'où la conclusion.

–Cas général.

Soit un point M de K de distance minimale à D. On remplace D par le disque D' touchant M obtenu en déplaçant D vers M. K étant connexe inclus dans $F_ij - D'$ est inclus dans une composante K' de $F_ij - D'$. Mais le diamètre de K' étant au plus 1 d'après la proposition 1, K' ne rencontre pas D. Donc $K' = K$, et le premier cas donne la conclusion.

Notation. *Pour tout point M on désignera par V_M un voisinage assez petit de M (disons une boule de centre M), en constatant que la valeur de vérité des propositions qui seront formulées n'alternent pas indéfiniment lorsque le rayon tend vers 0. Notamment on en supposera que*

$$M \in F_i \Longleftrightarrow V_M \cap F_i \neq 0.$$

Proposition 5. *Si deux points M et N sont distants de 1 l'un de l'autre, $J_M \cap J_N \neq \emptyset$ et $\#(J_M \cup J_M) \leq 3$ alors il existe des couleurs distinctes a, b, c telles que $J_M = \{a, b\}$, $J_N = \{b, c\}$, $\mathcal{D}_M \cap V_N \subseteq E_c$ et $\mathcal{D}_N \cap V_M \subseteq E_a$.*

Démonstration.

On remarque d'abord que $\mathcal{C}_M \cap V_N \cap F^2$ est totalement discontinu. Sinon, il existerait des couleurs a, b, c telles que $J_M \cup J_N \subseteq \{a, b, c\}$ et $\mathcal{C}_M \cap V_N \cap F_{ab}$ contient un arc Γ de longueur non nulle (conséquence du début de la démonstration de la proposition 2). Alors $\mathcal{C}(\Gamma) \cap V_M \subseteq F_c \Longrightarrow M \in E_c$ d'après $\star$, ce qui contredit $J_M \cap J_N \neq \emptyset$.

Ensuite, il existe un c tel que $\mathcal{C}_M \cap V_N$ rencontre E_c, et alors $M \notin F_c$ donc c est unique. On en déduit aisément $J_M = \{a, b\}$ et $J_N = \{b, c\}$ à une permutation près.

Montrons que $\mathcal{D}_M \cap V_N \subseteq E_c$. Soit un point M' voisin de M tel que $\mathcal{C}_{M'}$ rencontre dans $\mathcal{D}_M$ deux boules B et B' incluses dans E_c qui rencontrent $\mathcal{C}_M$ de chaque côté de N dans V_N.

Alors la zone Z enfermée par $\mathcal{C}_{M'}$, $\mathcal{C}_M$, B et B' au voisinage de N est incluse dans F_c. On pourrait le vérifier directement en utilisant toute la force de la proposition 3, mais on peut également le déduire de la proposition 4. En effet, sinon Z rencontrerait F_b et alors une composante K de $F_{bc} - \mathcal{D}_M$ rencontrant Z sortirait de V_N, en traversant $\mathcal{C}_M$. Donc M serait intérieur à $\mathcal{C}(K)$, ce qui contredit $M \in F_b$.

On a donc $\mathcal{D}_M \cap V_N \subseteq E_c$ quitte à diminuer la taille de V_N.

Proposition 6. *Si $n = 5$ alors $F^3 = F^4$.*

Démonstration.

Supposons par l'absurde qu'il existe un point M avec $J_M = \{a, b, c\}$, les autres couleurs disponibles étant d et e. Notons $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$. Par contraposition de la proposition 5, F_d et F_e recouvrent $\mathcal{C}$.

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On remarque que d'après la proposition 1, si $\mathcal{C}$ contient un arc (AB) inclus dans F_d alors $\Phi((AB))$ ne peut rencontrer F_d qu'en ses extrémités, donc est inclus dans F_e. De même en échangeant d et e. Il en résulte que r échange $F_d \cap \mathcal{C}$ et $F_e \cap \mathcal{C}$. On le vérifie en séparant les deux cas pour un point N de l'espace topologique $\mathcal{C}$: en résumé, ou bien il est adhérent à l'intérieur de $F_d \cap \mathcal{C}$, ou bien il est intérieur à $F_e \cap \mathcal{C}$ et alors non élément de F_d.

Soit G une composante de $F_d \cap \mathcal{C}$ privée de ses extrémités, et N celle de ses extrémités telle que $G \subseteq \mathcal{D}_{r(N)}$.

Soit $H = V_N \cap \mathcal{C} - F_d$. Soit enfin $U_N = \mathcal{C}(r(H)) \cap \mathcal{C}(r^{-1}(G)) \cap V_N$, qui est un ouvert inclus dans $\mathcal{E}_M$ et dans $F_a \cup F_b \cup F_c$.

Définition. *N étant variable, et à l'échange près de d et e, on dira que N est irrégulier si U_N rencontre F^2.*

Lemme 6.1. *Deux points irréguliers distincts sur $\mathcal{C}$, sont nécessairement diamétralement opposés.*

Démonstration.

Supposons par l'absurde qu'on ait deux points irréguliers N et N' de CC non diamétralement opposés. Soit $P \in U_N \cap F^2$ très proche de N. On déduit alors de la proposition 5 qu'à une permutation près des couleurs il existe un voisinage intérieur X de $\mathcal{C}_P \cap V_M$, disons l'intersection de V_M et de la couronne comprise entre les cercles de centre P et de rayons 1 et $1 - \epsilon$ tel que $X \subseteq E_a$.

De même pour N' on définit une zone X'. Or X et X' se rencontrent, donc ils sont inclus dans un même E_a. Mais alors M est intérieur à une composante bornée d'un certain $(D \cup X \cup X')^c$, ce qui contredit la propriété $\star$.

Ce lemme qu'on vient de démontrer permet de choisir N tel que les points N et $N' = r(N)$ soient réguliers ainsi que leurs opposés sur $\mathcal{C}$.

Lemme 6.2. *Si N et $N' = r(N)$ sont réguliers alors à une permutation près des couleurs les arcs K et K' suivants vérifient*

$$K = \mathcal{C}_{N'} cap \mathcal{E}_M \cap V_N \subseteq F_a$$

$$K' = \mathcal{C}_{r(N')} cap \mathcal{E}_M \cap V'_N \subseteq F_b$$

Démonstration. Le fait que N soit régulier implique que toute composante de U_N soit d'une seule couleur. S'il n'y a qu'une composante, soit a cette couleur ; et s'il y a une infinité de composantes à l'approche de N, soit a une valeur qu'elles prennent une infinité de fois. Dans les deux cas on constate que K, "limite" d'une suite de composantes de U_N de couleur a, est également dans F_a.

Puis, en remarquant que $\mathcal{C}(K)$ rencontre toutes les composantes de $U_{N'}$, on en déduit que $U_{N'}$ est disjoint de F_a puisque N' est régulier. Le lemme en découle.

Achevons la démonstration de la proposition.

On déduit du lemme 6.2 que $Y = V_M \cap \mathcal{D}_N \cap \mathcal{D}_{N'} \subseteq E_c$. De même, les opposés Q et Q' de N et N' étant réguliers vérifient $Y' = V_M \cap \mathcal{D}_Q \cap \mathcal{D}_{Q'} \subseteq E_b$, quitte à échanger encore a et b, car s'il était inclus dans E_c on aurait $M \in E_c$ d'après $\star$, contrairement à l'hypothèse $J_M = \{a, b, c\}$.

Soit enfin $R = r(N')$, dont on ne savait pas s'il était régulier. On constate qu'il est intérieur à $\mathcal{C}(Y) \cap \mathcal{C}(Y')$, donc $U_R \subseteq E_a$. Il s'ensuit que E_a ne rencontre pas $V_M \cap \mathcal{D}_R$, ni d'ailleurs $V_M \cap \mathcal{D}'_R$, où R' est l'opposé de R sur $\mathcal{C}$. Mais comme $\mathcal{D}_R$, $\mathcal{D}'_R$, Y et Y' recouvrent V_M, E_a ne rencontrerait même pas V_M, ce qui est absurde.

Proposition 7. *Si $n = 5$ alors $F^5 = \emptyset$.*

Démonstration.

Par l'absurde considérons un point $M \in F^5$, et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{C} \subseteq F^2$.

Lemme 7.1. *Si un point $N \in F^4$ est à une distance de M strictemennt comprise entre 0 et 2 alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_N \subseteq F^4$.*

Démonstration.

Soit $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_N$, et supposons par l'absurde que $P \notin F^3$ (puisque $F^3 = F^4$). On a donc $J_P = \{a, b\}$. Soit K la composante de P dans $\mathcal{C} \cap F_{ab}$. C'est un arc dont P n'est pas une extrémité, car $\mathcal{C} \subseteq F^2$ et $V_P \cap F^2 \subseteq F_{ab}$. Il résulte alors de l'hypothèse sur la distance que N est intérieur à $\mathcal{C}(K)$, donc hors de F_a et F_b, ce qui contredit $N \in F^4$.

Corollaire. *La rotation r de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$ conserve $\mathcal{C} \cap F^4$.*

A présent considérons une composante K_0 de $\mathcal{C} - F^4$, d'extrémités A_0 et B_0, et notons K_i, pour $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ses images successives par r, d'extrémités A_i et B_i. Enfin notons J_i la paire des couleurs de K_i.

Lemme 7.2. *Les paires J_i vérifient les équations suivantes pour tout i :*

$$J_i \cap J_{i+1} = \emptyset$$
$$J_i \cap J_{i+3} \neq \emptyset.$$

Démonstration.
La première de ces équations est évidente. Vérifions la deuxième. Si elle était fausse, l'intérieur de $\mathcal{C}(K_i) \cap \mathcal{C}(K_{i+3})$ serait d'une seule couleur, et donc M le serait aussi par $\star$, ce qui contredit $M \in F^5$.

Ces équations admettent une unique solution à une permutation près des couleurs : il y a 3 couleurs, disons a, b et c, qui apparaissent sur des côtés opposés ; les deux autres ont six places à occuper : elles le font en alternant.

Lemme 7.3. *Posons par exemple $J_0 \cap J_2 = \{d\}$. Alors K_0 et K_2 sont ou bien tous deux intérieurs à $\mathcal{D}_M \cup F_d$, ou bien tous deux intérieurs à $\mathcal{E}_M \cup F_d$.*

Démonstration.
Posons $J_0 = \{a, d\}$ et $J_2 = \{b, d\}$. Soient X et X' les adhérences des deux composantes de l'intérieur de $\mathcal{C}(K_1) \cap \mathcal{C}(K_4)$, en sorte que X rencontre E_a. En effet, F_a et F_b recouvrent $X \cup X'$, et F_b ne peut pas recouvrir $X \cup X'$ à cause de $\star$et $M \in F^5$.

Montrons qu'alors il existe une composante de $X \cap F_a$ contenant M et non réduite à $\{M\}$. Posons par définition des A_i et B_i que $X = \overline{\mathcal{D}}_{A_1} \cap \overline{\mathcal{D}}_{B_4}$.

Si $X \subseteq F_a$ c'est évident, sinon F_{ab} rencontre l'intérieur de X. Soit Y une composante de F_{ab} rencontrant l'intérieur de X. Alors $Y \subseteq X$ d'après la proposition 1, puisque $A_1, B_4 \in F^4$. Il suffira de montrer que $M \in Y$.

Soit N tel que $\mathcal{C}_{A_1} \cap \overline{\mathcal{C}}_{B_4} = \{M, N\}$.

Soit à présent un 1-disque D tel que $Y \nsubseteq D$ et $N \in D$. Il résulte alors de la proposition 4 que Y rencontre F^4 ailleurs qu'en N. Mais à cause du lemme 7.1, et du fait que K_1 et K_4 ne rencontrent pas F^4, $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_4)$ ne rencontrent pas non plus F^4 dans X en dehors du point M. Donc $M \in Y$, ce qu'on voulait démontrer.

De même il existe une composante de $X' \cap F_b$ contenant M et non réduite à M. Car F_a ne peut pas rencontrer X', à cause de $a \in J_0$. Le lemme 7.3 en résulte.

Achevons la démonstration de la proposition. Il résulte du lemme 7.3 appliqué deux fois avec des numérotations différentes, que K_0, K_2 et K_4 sont ou bien tous trois intérieurs à $\mathcal{D}_M \cup F_d$, ou bien tous trois intérieurs à $\mathcal{E}_M \cup F_d$ (car un K_i ne peut être intérieur à la fois à $\mathcal{D}_M \cup F_d$ et $\mathcal{E}_M \cup F_d$ puisqu'il est inclus dans F^2). Dans les deux cas, M serait intérieur à $\mathcal{C}(F_d)$, ce qui contredit $M \in F_d$.

Il ne reste plus à présent qu'à étudier les points de F^4, dont on sait qu'il est non vide par la proposition 4.

Lemme 8.1. *Si M, N, Q forment un triangle équilatéral de côté 1, $M, Q \in F^4$ et $N \notin F^4$ alors $\mathcal{C}_M \cap V_N \subseteq F_e$, où $e \notin J_M$.*

Démonstration.

Supposons par l'absurde qu'il existe $N' \in \mathcal{C}_M \cap V_N$ mais $N' \notin F_e$. On a alors $N' \in F^2$ car pour tout $a \neq e$ on a $N' \notin E_a$ puisque $M \in F_a$. Donc il existe $a, b \neq e$ tels que $N' \in F_{ab}$. Et puisque $N' \in V_N$ on a aussi $N \in F_{ab}$. Or $N \notin F^3$, d'où $N \notin F_e$ et $V_N \cap F_e = \emptyset$. Il en résulte $V_N \cap \mathcal{C}_M \subseteq F_{ab}$, ce qui contredit $Q \in F^4$.

Proposition 8. *Si $n = 5$ alors F^4 est discret.*

Démonstration.

Par l'absurde supposons que M est un point d'accumulation de F^4, et soit K l'